Početní část 2 - 21.6.2022

3. Spočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 - 3\cos x}\,dx$. (9 bodů)

   Nápověda: použijte substituci $z = e^{ix}$.

   Řešení:

   Použijeme substituci $z = e^{ix}$. Potom $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ a $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ a $dx = \frac{1}{iz}dz$. Po dosazení dostaneme

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 - 3\cos x}\,dx \\
&= \int_\gamma \frac{\left(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)^2}{5 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}\,dz \\
&= \int_\gamma \frac{\frac{-z^4+2z^2-1}{4z^2}}{\frac{-3z^2+10z-3}{2z}} \cdot \frac{1}{iz}\,dz \\
&= \frac{1}{6i} \int_\gamma \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right) z^2}\,dz \\
&= i2\pi \cdot \frac{1}{6i}\left(\operatorname{Res}(g, \tfrac{1}{3}) + \operatorname{Res}(g, 0)\right).
\end{aligned}
$$

   Zde jsme označili $g(z) = \dfrac{z^4 - 2z^2 + 1}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right) z^2}$ a $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Pól v $\frac{1}{3}$ má násobnost 1 a tedy

$$
\operatorname{Res}(g, \tfrac{1}{3}) = \left.\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{(z-3)\,z^2}\right|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}.
$$

   Pól v 0 má násobnost 2 a tedy

$$
\operatorname{Res}(g, 0) = \left.\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)}\right)'\right|_{z=0} = \left.\frac{2\left(3z^5 - 15z^4 + 6z^3 + 10z^2 - 9z + 5\right)}{3(z-3)^2\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}\right|_{z=0} = \frac{10}{3}.
$$

   Celkem tedy dostáváme

$$
I = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{8}{3} + \frac{10}{3}\right) = \frac{2}{9}\pi.
$$

4. Uvažme distribuce $S_n, T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, definované pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jako

$$\langle S_n, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} n \left|\sin \frac{x}{n}\right| \varphi(x)\, dx, \quad \langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+(nx)^4}\varphi(x)\, dx.$$

(a) Spočtěte S_n'.

(b) Spočtěte limitu posloupnosti $S_n' + T_n$ ve smyslu konvergence v prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(9 bodů)

Řešení:

Platí (podle vzorečku z přednášky, případně aplikací per partes)

$$\langle S_n', \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\sin \tfrac{x}{n}) \cdot \cos \tfrac{x}{n} \cdot \varphi(x)\, dx + (n|\sin(\tfrac{\pi}{n})| - 0)\varphi(-\pi) + (0 - n|\sin(\tfrac{\pi}{n})|)\varphi(\pi).$$

Tedy $S_n' = T_{f_n} + n\sin(\frac{\pi}{n})\delta_{-\pi} - n\sin(\frac{\pi}{n})\delta_\pi$, kde jsme označili

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin \tfrac{x}{n}) \cdot \cos \tfrac{x}{n} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}.$$

Všimněme si rovněž, že $f_n \to \operatorname{sgn} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]} =: f$

Dále platí (limitu a integrál zaměníme pomocí Lebesgueovy věty - majoranta $||\varphi||_\infty \chi_{[-\pi,\pi]}$, dále pak použijeme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$)

$$S_n' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T_f + \pi\delta_{-\pi} - \pi\delta_\pi.$$

Alternativně je možné si uvědomit, že $S_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T_h$, kde $h(x) = |x| \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}$ a pak spočítat $(T_h)'$.

Pro posloupnost T_n použijeme podobně Lebesgueovu větu s majorantou $||\varphi||_\infty \frac{1}{1+x^4}$ a dostaneme

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx.$$

Poslední integrál spočítáme například pomocí reziduové věty (a Jordanova lemmatu)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx &= i2\pi \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+x^4}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+x^4}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \frac{i2\pi}{4\sqrt{2}}(-1-i+1-i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme

$$S_n' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T_f + \pi\delta_{-\pi} - \pi\delta_\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\delta.$$